

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### Etapa locală

### CLASA A X-A

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.
- Timp efectiv de lucru: 3 ore

#### **Problema nr. 1**

Fie  $a \in (1; +\infty)$  și numerele  $x = \sqrt[4^n-1]{\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{a}\right)^{2^n}}$  și  $y = \sqrt[2^n+1]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n(n+1)]{a}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că  $x > y$ .

#### **Problema nr. 2**

Să se determine relația dintre  $a, b \in \mathbb{Z}$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + a[x] + b[2x]$  este bijectivă și  $f = f^{-1}$ . S-a notat  $[x]$  partea întreagă a numărului  $x$ .

#### **Problema nr. 3**

Punctele  $D, E, F$  împart laturile  $AB, BC$  respectiv  $CA$  ale unui triunghi în același raport  $k$ . Punctele  $M, N, P$  împart segmentele  $[AD], [BE]$  respectiv  $[CF]$  în același raport  $l$ . Să se arate că triunghiurile  $ABC$  și  $MNP$  au același centru de greutate.

#### **Problema nr. 4**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $a^{\log_b x^2} + a^{\log_x b^2} = a^{1+\log_b x} + a^{1+\log_x b}$ , unde  $a, b > 1$ .

G.M. -B 1/2024